

Introduzione al calcolo delle Probabilità
a cura di
Francesco Fabi



ce3s

CENTRO STUDI
STATISTICI
E SOCIALI

Lo spazio campione

- Per affrontare un problema di decisione in situazioni incerte, è fondamentale lo studio di tutti i possibili esiti, che in alcuni casi possono anche essere esplicitamente enumerati, semplificando e chiarendo gli aspetti importanti del problema.
- In altri casi possono essere enumerati solo alcuni e quello che non si conosce ancora si denota “altro”.

Gli eventi

- Nel caso in cui i possibili esiti da considerare siano solo 2 si parla di evento.
- Un evento è una proposizione che può essere vera o falsa e di cui non è noto il valore logico al momento di assumere la decisione.

Evento certo e impossibile

- Con riferimento ad un certo *stato di informazione*, per un certo individuo, cioè all'insieme dei fatti che si suppongono noti (dati), un evento è ***certo***, e viene solitamente denotato con Ω , quando l'individuo ritiene che, come conseguenza necessaria dei fatti, sia ***VERO***.
- ***impossibile***, denotato con $\emptyset$, quando ritiene, come conseguenza necessaria dei fatti, che sia ***FALSO***.

Il caso generale

- *Un evento in generale è **possibile** quando nessuno dei due esiti può essere stabilito a priori (e quindi nessuno può essere escluso).*
- ***La distinzione in certo, impossibile e possibile ha carattere soggettivo e temporaneo. Agli eventi si attribuisce una misura di probabilità.***

La probabilità è una misura delle aspettative nel verificarsi di un evento

- ***il valore della probabilità è la misura (un numero) che esprime l'opinione del soggetto (decisore) in merito al verificarsi di un ben determinato evento A , ovvero esprime il suo grado di fiducia nel verificarsi dell'evento.***
- Dato un evento A la sua probabilità si indica con $P(A)$.

Prime regole della misura

- Si ha: $P(\Omega) = 1$ e $P(\emptyset) = 0$
- Per ogni evento possibile A : $0 < P(A) < 1$
- L'evento negazione di A $\bar{A}$ è vero quando A è falso e viceversa.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Esempio:
- $P(\text{domani non piove}) = 1 - P(\text{domani piove})$

Intersezione

- Si dirà intersezione degli eventi A e B e si indicherà con $C=A \cap B$, l'evento C che è vero se sono veri entrambi gli eventi A e B, mentre risulta falso se almeno uno dei due è falso.
- Esempio:
- A= Passerà l'autobus in orario
- B= Ci sarà posto a sedere
- $C=A \cap B$ = Passerà l'autobus in orario e ci sarà posto a sedere.

Unione

- Dati due eventi A e B , l'*unione degli eventi* $D=A\cup B$, è l'evento D che è vero se uno almeno degli eventi A o B è vero.
- Esempio:
- A = Incontrerò in piazza Ludovico
- B = Incontrerò in piazza Clara
- $D= A\cup B$ = Incontrerò almeno uno fra Ludovico e Clara.

Eventi incompatibili ed esaustivi

- Si dirà che due eventi A e B sono *incompatibili* se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro.
- Due eventi A e B si diranno *esaustivi* se è inevitabile che almeno uno si verifichi.
- Il concetto si estende analogamente anche a più di due eventi.
- Quando si elencano i possibili esiti di uno studio si suddividono le varie possibilità in eventi incompatibili ed esaustivi.

Valutazione classica (giochi di sorte)

- La valutazione di una probabilità si basa talvolta su semplici giudizi qualitativi di equiprobabilità.
- Se i risultati elementari (incompatibili ed esaustivi) di uno spazio campione di n eventi sono giudicati da un individuo ugualmente probabili, la valutazione della probabilità di ciascuno è $p=1/n$, e un risultato (evento E) che sia costituito di k degli n eventi equiprobabili ha probabilità $p=k/n$.
- *La probabilità di un evento E è data dal rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di E (k) e quello dei casi possibili (n).*

Regole di calcolo

- *Se A e B sono incompatibili:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- *Altrimenti:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

La regola di valutazione statistica o frequentista (nata nel Regno Unito)

- Se si considera una successione di eventi $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, in qualche modo analoghi, e si indica con f_n la frequenza relativa del numero di volte che si è osservato il verificarsi dell'evento sui primi n , si è generalmente portati a prevedere un andamento simile per la frequenza di analoghi eventi futuri. In altre parole si valuta che la probabilità del verificarsi di ognuno degli analoghi eventi futuri sia $p=f_n$.

Regola di valutazione frequentista

- per valutare la probabilità di un evento si calcola la frequenza relativa osservata su un numero (possibilmente grande) di eventi quanto più possibile analoghi a quello che interessa e si utilizza tale valore come probabilità.

Come influisce un'informazione

- La valutazione della probabilità di un evento dipende dalle situazioni in cui viene effettuata e dalle informazioni che si possiedono sull'evento stesso e su altri eventi in qualche modo collegati.
- Se cambia la situazione o si acquisiscono nuove informazioni sugli eventi di interesse, cambia anche la valutazione di probabilità.

Probabilità condizionate

- $P(B/A)$ si legge probabilità di B dato A e indica la valutazione della probabilità dell'evento B quando si è venuti a conoscenza del verificarsi dell'evento A.
- $P(B/A)$ è la probabilità condizionata di B dato A.
- Lo stesso vale per l'altra probabilità condizionata $P(A/B)$.

Regola del prodotto

- In generale si ha:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(A/B)P(B)$$

- Per gli eventi indipendenti dato che $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$
- vale la regola:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Eventi correlati

- Se tra eventi c'è dipendenza, può risultare $P(B/A) > P(B)$ oppure $P(B/A) < P(B)$, nella prima situazione si parla di eventi correlati positivamente: il verificarsi di A rende più probabile il verificarsi anche di B;
- nel secondo caso si parla di eventi correlati negativamente: il verificarsi di A ostacola il verificarsi anche di B.

Come costruire lo spazio campione degli eventi incompatibili ed esaustivi

- Supponiamo di voler studiare l'efficacia dei caschi protettivi per bicicletta nella prevenzione dei traumi cranici. Nel caso più semplice avremo:
- A=il ciclista usava il casco protettivo
- B=nella caduta ha riportato un trauma cranico
- Avremo perciò una tabella di contingenza: righe casco (vero falso); colonne trauma cranico (vero falso).
- In casi più complessi, ad esempio ci sono 2 tipi di casco, avremo un'ulteriore dimensione (vero o falso) a seconda del tipo di casco.

Valutazione statistica delle probabilità condizionate.

Trauma Cranico (evento B)	Casco Protettivo (evento A)		totale
	SI	NO	
SI	17	218	235
NO	130	428	558
Totale	147	646	793

Calcoliamo $P(B/A)$

- $P(B/A)$ =frequenza relativa del verificarsi di B tra quanti avevano A verificato.
- Dalla tabella (di contingenza) la frequenza assoluta di A è 147 mentre la frequenza di B tra quelli che hanno verificato A è 17.
- Allora $P(B/A)=17/147=0,12$.
- Confrontiamo con $P(B)=235/793=0,32$.
- In questo caso $P(B/A)<P(B)$. Portare il casco è correlato negativamente con il trauma cranico.

Formula della probabilità totale

- L'evento B si può decomporre nell'unione dei due eventi incompatibili:
- $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$,
- calcolando la probabilità si ottiene la formula della probabilità totale:
- $P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A})P(\bar{A})$.
- I due addendi che compaiono nella somma costituiscono le probabilità composte.

Formula di Bayes

- Se esplicitiamo $P(A/B)$ dalla relazione:

$$P(A)P(B/A)=P(A/B)P(B)$$

- e sostituiamo a $P(B)$ al denominatore la probabilità composta, otteniamo la formula di Bayes:

$$P(A / B) = \frac{P(B / A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B / A)P(A)}{P(B / A)P(A) + P(B / \bar{A})P(\bar{A})}$$