

La distribuzione normale
a cura di
Francesco Fabi



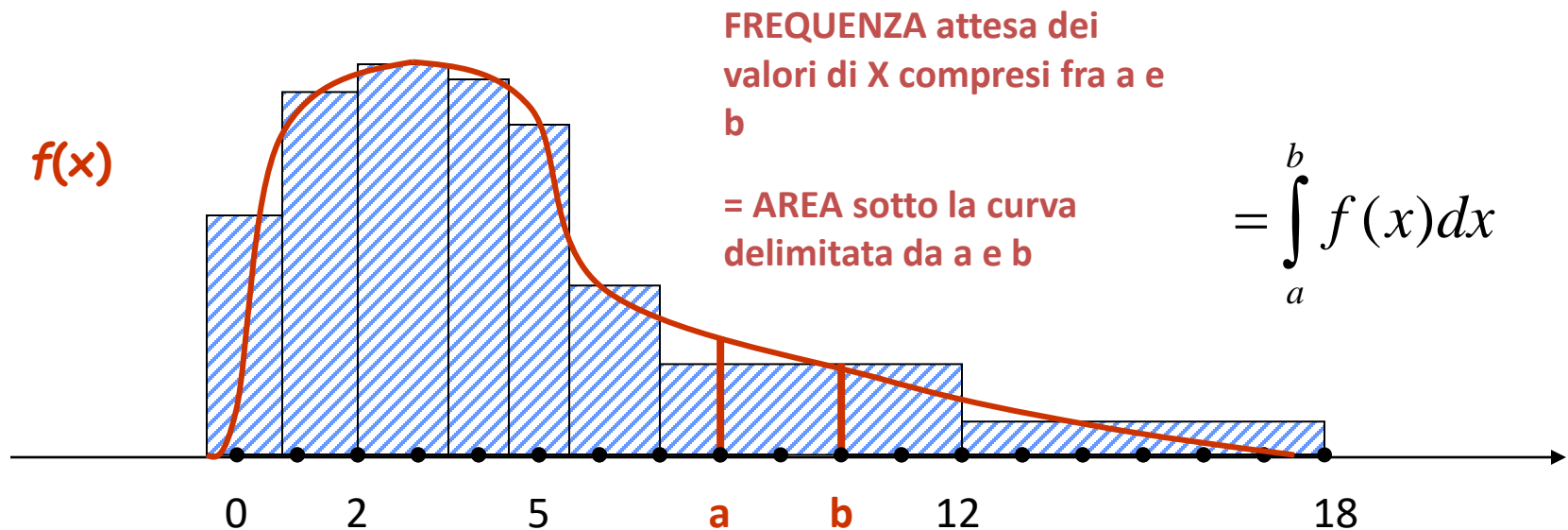
ce3s

CENTRO STUDI
STATISTICI
E SOCIALI

Curve teoriche di densità

Se immaginiamo di fare un istogramma con intervallini piccolissimi, e di unire i punti medi delle colonne, otteniamo un grafico dato da una curva continua.

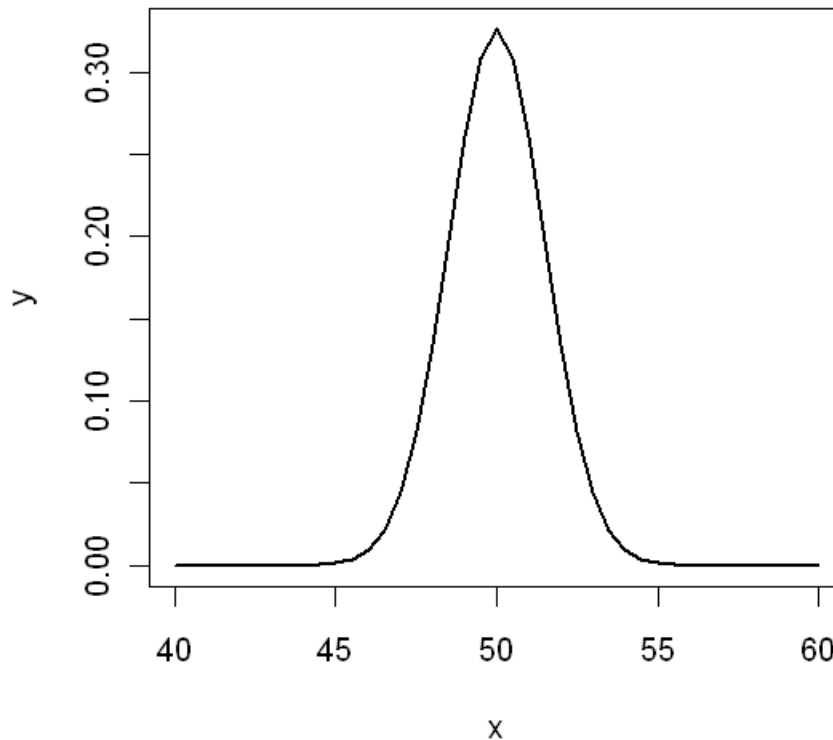
La matematica fornisce equazioni di curve continue che possono essere interpretate come curve di densità teoriche, corrispondenti a distribuzioni "ideali" di fenomeni quantitativi di interesse X.



La curva Normale (i)

La principale **curva di densità teorica** è la Normale (o Gaussiana), che descrive l'andamento di quei fenomeni misurabili come caratteri continui che dipendono "dal caso", come gli errori di misurazione. E' infatti simmetrica e ha una forma a campana.

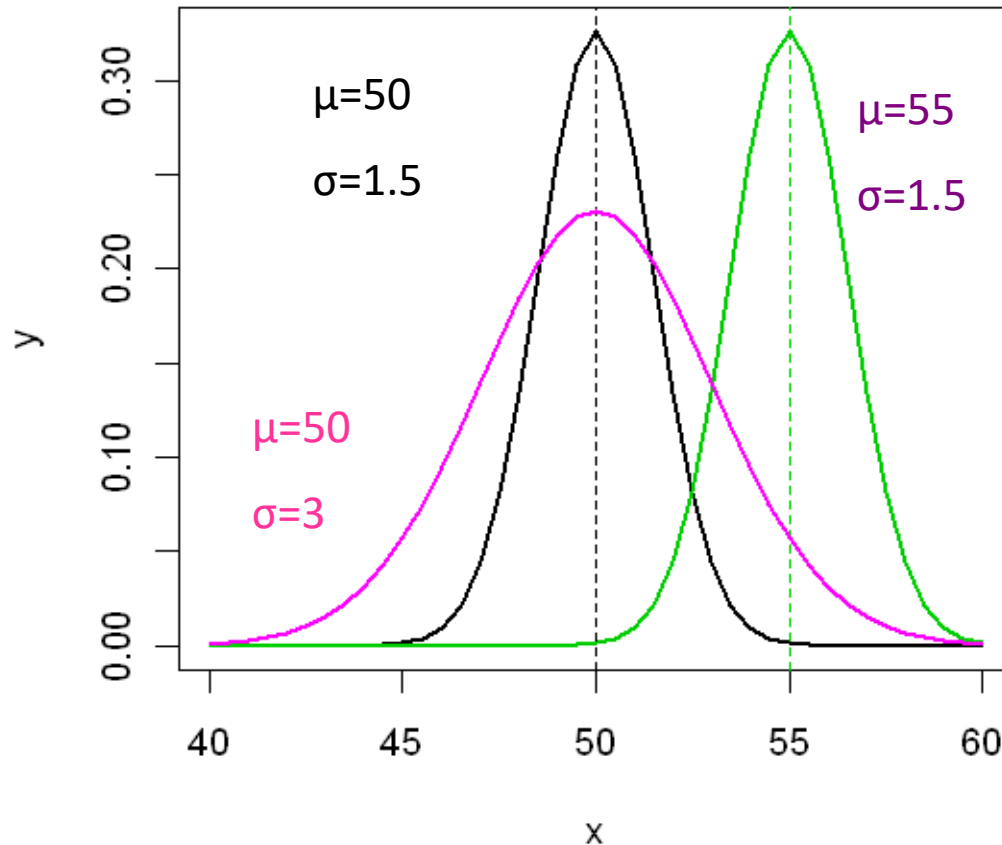
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



Es: distribuzione dei risultati della misurazione ripetuta del peso di un paziente di 50 kg, ma anche distribuzione delle altezze di giovani maschi della stessa età in una popolazione.

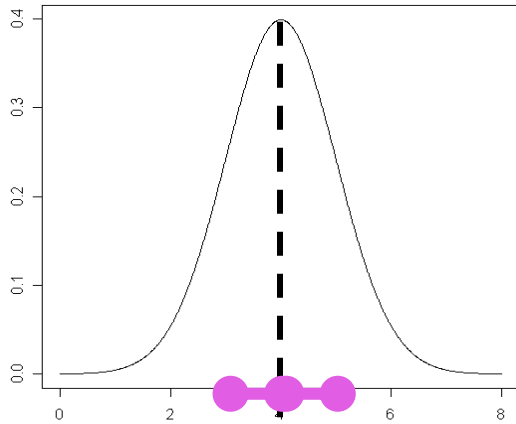
La curva Normale (ii)

La formula che descrive la curva contiene 2 parametri μ e σ , che determinano rispettivamente dove si posiziona l'asse di simmetria della curva rispetto all'asse x e quanto è ampia la campana



→ μ è interpretabile come **valore medio**
→ σ , che determina la **dispersione** di X, coincide con la **deviazione standard**

Proprietà della Normale



L'area compresa sotto la curva nei seguenti intervalli = la frequenza dei valori di X compresi in quegli intervalli è circa(*):

$$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$$

68%

$$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$$

95%

$$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$$

99.7%

Mediana=Media= μ . I due quartili Q1 e Q3 si trovano a distanza 0.67σ dalla media:

$$Q_1 = \mu - 0.67 \cdot \sigma$$

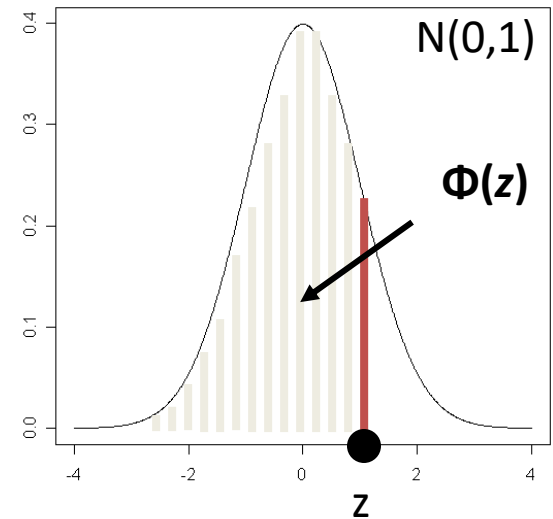
$$Q_3 = \mu + 0.67 \cdot \sigma$$

Calcolare probabilità per la Normale

Per la Normale(0,1) (detta Standard) calcolatori o tavole forniscono i valori dell'area sotto la curva, fino a z : indichiamola con $\Phi(z)$, per ogni z .

Per qualsiasi altra Normale(μ, σ), per avere l'area fino a x , basta calcolare Φ sul valore trasformato:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (\text{Standardizzazione})$$



Per calcolare aree con altra forma, basta comporla o scomporla in pezzi del tipo di $\Phi(z)$, ricordando che vale la simmetria attorno all'asse μ , per cui:

$$\text{Area}(Z < -z) = \text{Area}(Z > z)$$

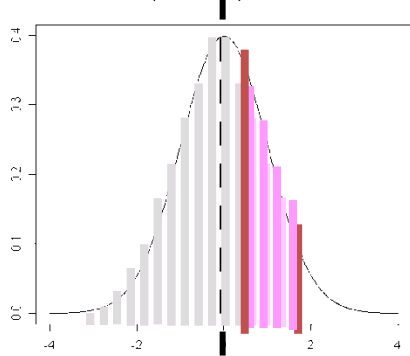
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$\Phi(0) = 0.5 \quad \Phi(+\infty) = 1$$

Calcolare probabilità per la Normale

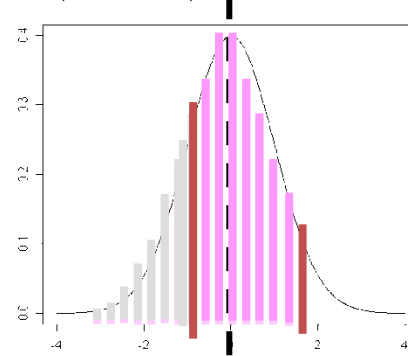
Utilizzando tavole che forniscono $\Phi(z) = \text{Area}(-\infty, z)$ per $z > 0$:

$$\text{Area}(a, b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$



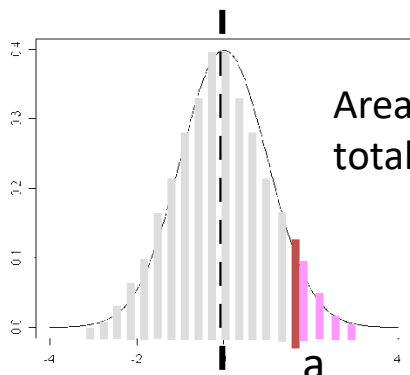
a b

$$\text{Area}(-a, b) = \Phi(b) - (1 - \Phi(a))$$



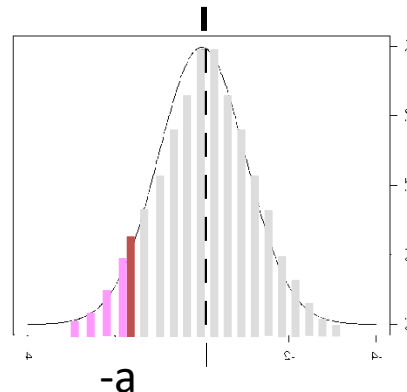
-a b

$$\text{Area}(a, +\infty) = 1 - \Phi(a)$$



a

$$= \Phi(-a)$$



-a

Due valori di Φ da ricordare:

$$\Pr(Z > 1.96) = \Pr(Z < -1.96) = 2.5\%$$

$$\Pr(Z > 1.64) = \Pr(Z < -1.64) = 5\%$$

Esempio di utilizzo del modello Normale

In una popolazione di ragazze adolescenti, il Body Mass Index (BMI) si distribuisce secondo una Normale con media 23 e varianza 7. Se definiamo “sottopeso” le ragazze con BMI inferiore a 18, qual è la probabilità di essere sottopeso? Quante ragazze risulteranno sottopeso in un gruppo di 60?

Variabile aleatoria: X = valore del BMI

Informazioni: $\mu=23$ $\sigma^2=7$

Quesito: $P(X < 18)$

Standardizziamo il valore $x=18$:

(è negativo!) $\Phi(-1.89) = 1 - \Phi(1.89)$

$= 1 - 0.971 = 0.029 \approx 3\%$

Su 60 ragazze, circa il 3%, pari a $0.029 \cdot 60 = 1.74$, dunque circa 2 risulteranno in sottopeso

$$z = \frac{18 - 23}{\sqrt{7}} = -1.89$$

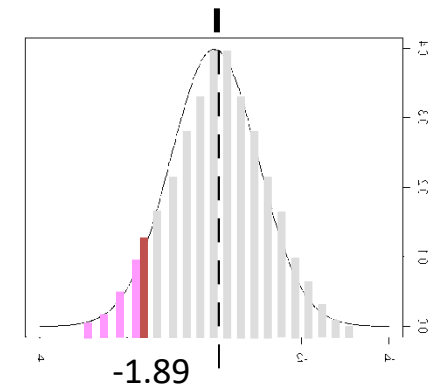
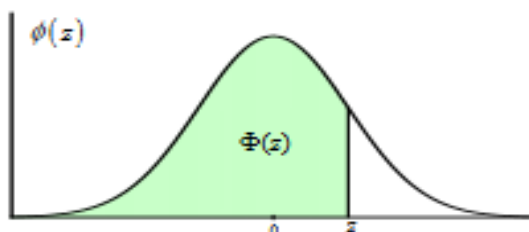


Tavola 1 – Funzione di ripartizione della variabile casuale normale standardizzata



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990