Statistica inferenziale: Introduzione ai test d’Ipotesi

A cura di

Francesco Fabi

CE3S
CENTRO STUDI
STATISTICI
E SOCIALI

Che cos’e’ un’ipotesi?

- Un’ipotesi è un’assunzione su un parametro della popolazione:
  - Media

Esempio: il valore della media delle altezze dei diciottenni maschi in cm è $\mu = 178$

  - proporzione

Esempio: la proporzione di adulti che hanno avuto epatite A $\pi = 0.12$

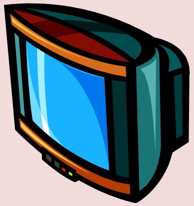
L'ipotesi nulla, H_0

- È l'ipotesi base che deve essere verificata

Esempio: Il numero medio di apparecchi televisivi nelle case europee è 3

$$H_0 : \mu = 3$$

Si tratta sempre di un parametro e mai di una statistica



$$H_0 : \mu = 3$$

$$H_1 : \mu \neq 3$$

L'ipotesi nulla H_0 (il suo significato e uso)

- Si inizia assumendo che l'ipotesi nulla sia vera
  - Come in un processo l'imputato è considerato innocente finchè non si prova la colpevolezza
- Si riferisce allo stato presente
- Contiene sempre i simboli "=" , "≤" or

- Può essere o meno rifiutata (con lo scopo di accettarne una nuova di lavoro).

L'ipotesi alternativa, H1

- E' l'assunzione che si contrappone all'ipotesi nulla
  - Per esempio: Il numero medio di apparecchi televisivi nelle case europee è diverso da 3 (H_1: $\mu \neq 3$)
- Mette alla prova la situazione presente.
- Può essere accettata o meno.
- In generale è l'ipotesi che il ricercatore vorrebbe provare.

L’errore di prima e di seconda specie

Quando si applica un procedimento di verifica di ipotesi, si possono commettere due tipi di errori, l’errore di prima specie e l’errore di seconda specie.

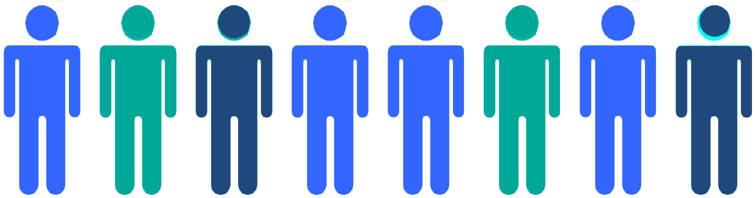
- L’errore di prima specie (detto anche livello di significatività) si verifica se si rifiuta l’ipotesi nulla quando questa è vera e quindi non dovrebbe essere rifiutata. La probabilità che si verifichi un errore di prima specie è indicata con α.
- L’errore di seconda specie si verifica se si accetta l’ipotesi nulla quando questa è falsa e quindi dovrebbe essere rifiutata. La probabilità che si verifichi un errore di seconda specie è indicata con β.

Il processo di verifica

Assuzione: l'età media della popolazione è 50.

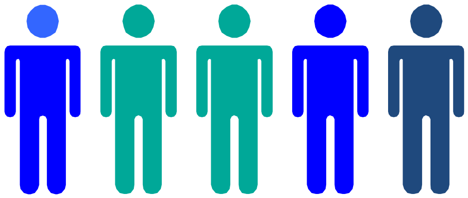
Ipotesi nulla:

H_0: $\mu = 50$)



Popolazione

Si sceglie un campione casuale



Campione

Suppponiamo che la media campionaria Sia 20: $\bar{X} = 20$

E' $\bar{X} = 20$ verosimile se $\mu = 50$?

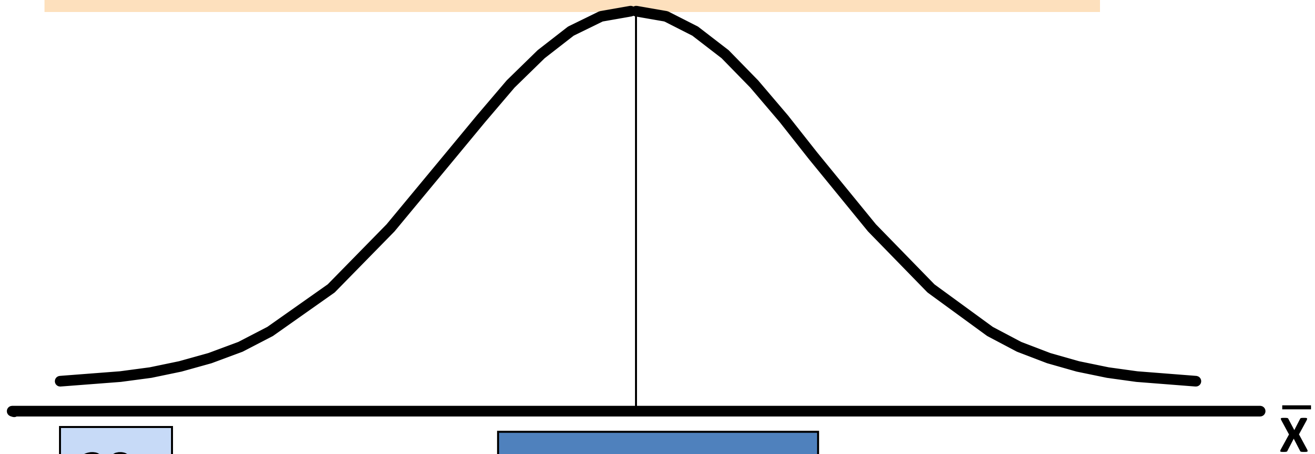
Se non è verosimile

si rifiuta

l'ipotesi nulla

Le motivazioni per rifiutare H0

Distribuzione campionaria di $\bar{X}$ se è vera l'ipotesi nulla



20

μ = 50

se H_0 è vera

È poco verosimile ottenere questo valore campionario …

… Se questa fosse la vera media…

… Allora rifiuteremo l'ipotesi che

μ = 50.

t Test per la media (σ incognito)

- Trasformiamo la statistica campionaria ($\overline{X}$) nella statistica test t e procediamo come prima.

Tests per μ

σ noto (Z test)

σ incognito (t test)

La statistica test è:

$$t_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Esempio: test a 2 code (σ incognito)

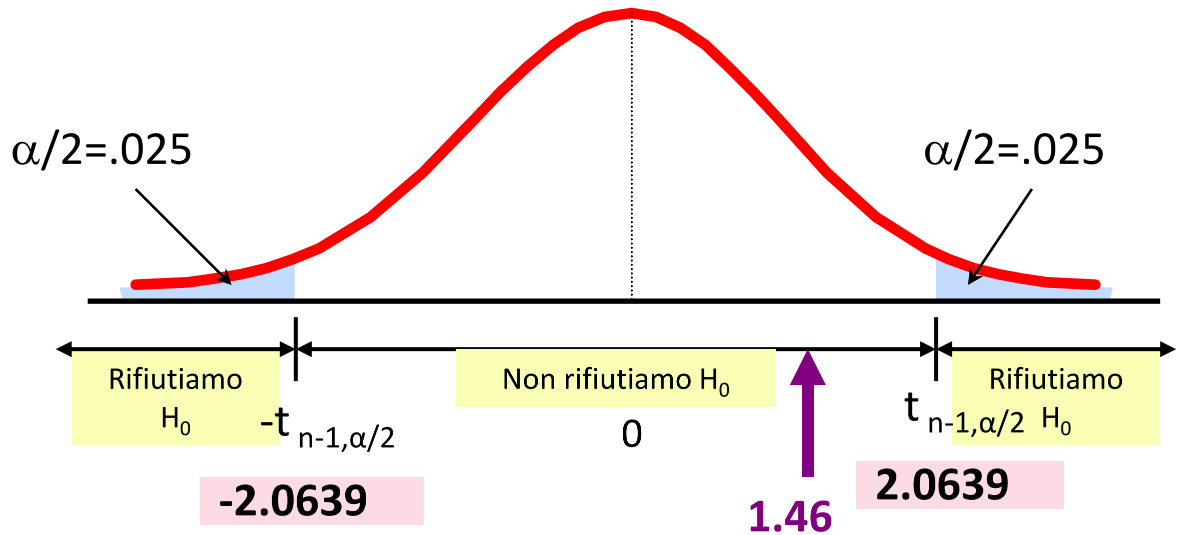
Il costo medio di una stanza d'albergo a Parigi si dice che sia € 168 a notte. Sulla base di un campione casuale di 25 alberghi risulta $\bar{X}$ = € 172.50 e S = € 15.40. sottoponiamo a test a livello 5%.

H_0: $\mu = 168$

H_1: $\mu \neq 168$

Soluzione:

H_0: $\mu = 168$
H_1: $\mu \neq 168$



- $\alpha = 0.05$
- $n = 25$
- σ è incognito, quindi usiamo una **statistica test t**

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{172.50 - 168}{\frac{15.40}{\sqrt{25}}} = 1.46$$

- Valore critico:

$t_{24} = \pm 2.0639$

Non rifiutiamo H_0: non c'è sufficiente evidenza che il costo sia diverso da € 168

Test di ipotesi per le proporzioni

- Si applica a variabili categoriche
- Con 2 possibili esiti
  - “Successo” (si possiede una certa caratteristica)
  - “Fallimento” (non si possiede una certa caratteristica)
- La proporzione di soggetti che possiedono la caratteristica nella popolazione è π

Proporzioni

- Denotiamo con p la proporzione osservata di successi nel campione

- $$p = \frac{X}{n} = \frac{\text{numero di successi nel campione}}{\text{numerosità campionaria}}$$

- Se sia $n\pi$ che $n(1-\pi)$ valgono almeno 5, la distribuzione di p può essere approssimata da una distribuzione normale con
- Media $\mu_p = \pi$ scarto standard $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}$

Test di ipotesi

- La distribuzione campionaria di p è normale e la statistica test è:

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$$

Test per p

$n\pi \geq 5$
e
$n(1-\pi) \geq 5$

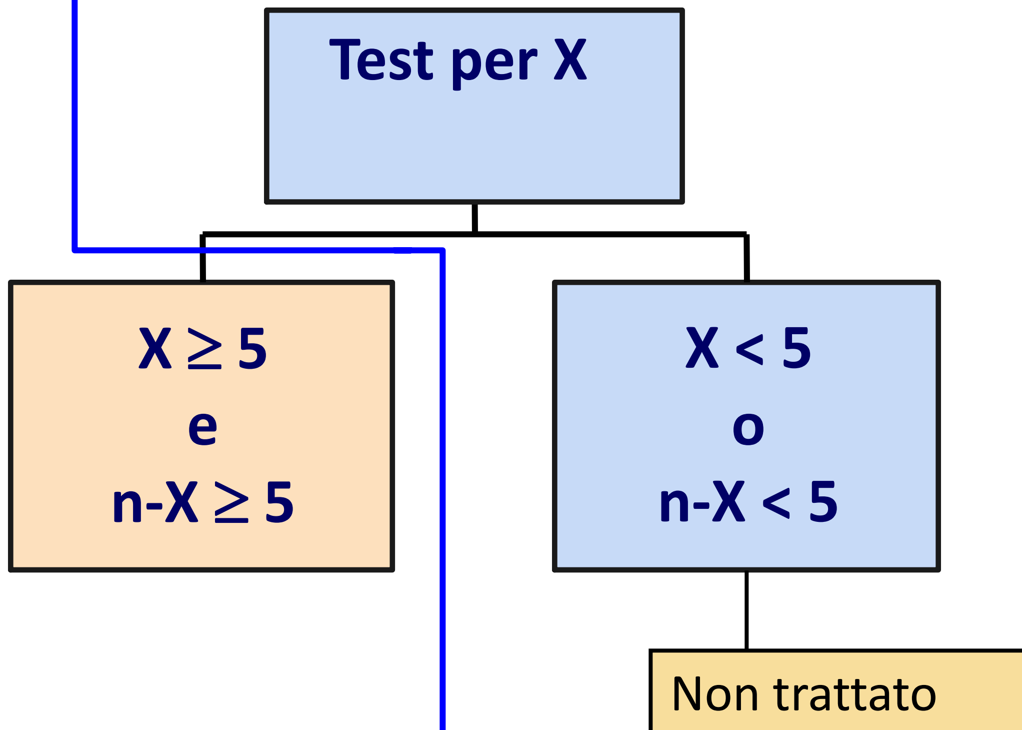
$n\pi < 5$
o
$n(1-\pi) < 5$

Non trattato

Z Test

- La seguente è una forma equivalente di statistica test, X:

$$Z = \frac{X - n\pi}{\sqrt{n\pi(1-\pi)}}$$



Esempio: Z Test

Un gruppo di ricerca ritiene che 8% sia la prevalenza di un gene nella popolazione. Per sottoporre a verifica l'assunzione si estrae un campione casuale di 500 soggetti in cui si ottengono 25 risultati positivi. Effettuiamo il test al livello di significatività 5%.

Verifichiamo:

$$n\pi = (500)(0.08) = 40$$

$$n(1-\pi) = (500)(0.92) = 460$$

Soluzione

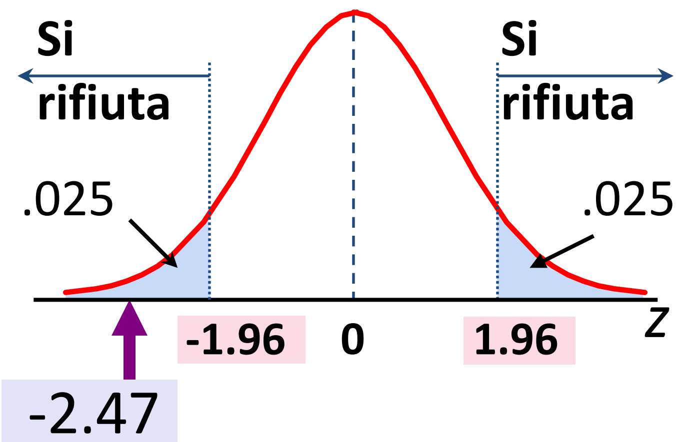
H_0: $\pi = 0.08$

H_1: $\pi \neq 0.08$

$\alpha = 0.05$

n = 500, p = 0.05

Valori critici: ± 1.96



Statistica test:

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{.05 - .08}{\sqrt{\frac{.08(1-.08)}{500}}} = -2.47$$

Decisione:

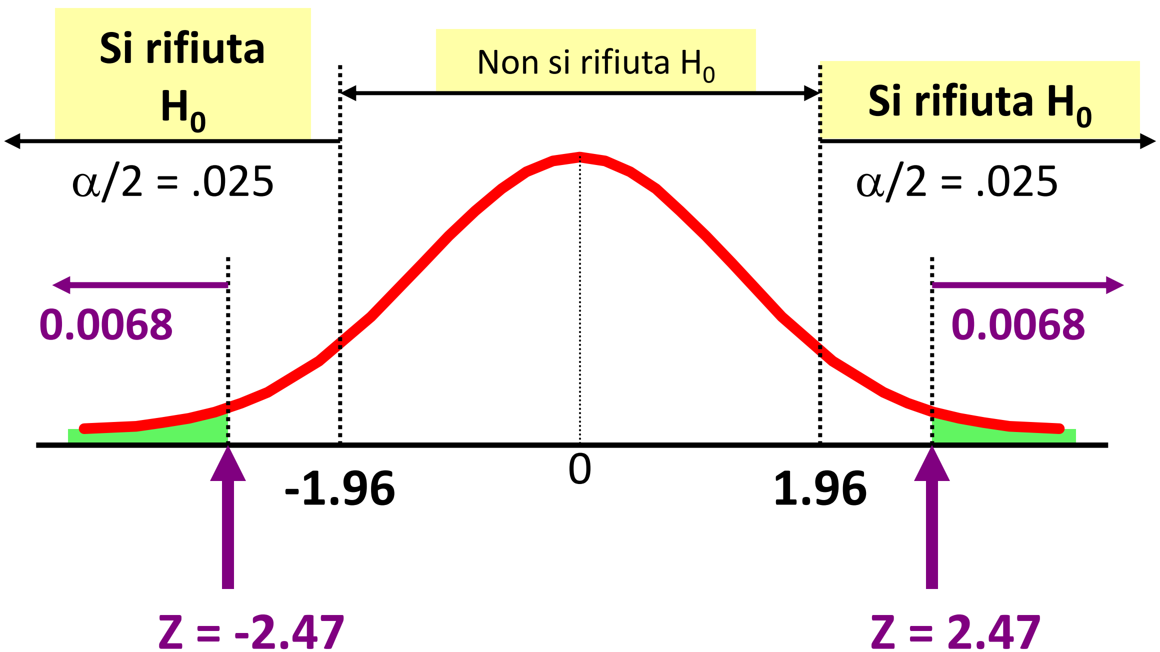
Si rifiuta H_0 con $\alpha = 0.05$

Conclusione:

C'è sufficiente evidenza per rifiutare l'ipotesi che la prevalenza sia 8% al livello 5%.

p-Value

Calcoliamo il p-value confrontiamo con α



p-value = 0.0136:

$$P(Z \leq -2.47) + P(Z \geq 2.47)$$
$$= 2(0.0068) = 0.0136$$

Si rifiuta H_0 dato che il p-value = 0.0136 < α = 0.05